
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Studijní program: M 2612 - Elektrotechnika a informatika
Studijní obor: 3901T025 - Přírodovědné inženýrství

**Vývoj konečně prvkového modelu
elasticity s vlivem tepelné roztažnosti**

**Development of an Elasticity Finite
Element Model with Thermal
Expansion Influence**

Diplomová práce

Autor: **Jan Lisal**
Vedoucí práce: Ing. Dalibor Frydrych, Ph.D.
Konzultant: Ing. Petr Rálek, Ph.D.

V Liberci 18. května 2007

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Katedra modelování procesů

Akademický rok: 2006/2007

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Jméno a příjmení: **Jan Lisal**

studijní program: M 2612 – Elektrotechnika a informatika

obor: 3901T025 – Přírodovědné inženýrství

Vedoucí katedry Vám ve smyslu zákona o vysokých školách č.111/1998 Sb. určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu:

Vývoj konečně prvkového modelu elasticity s vlivem tepelné roztažnosti

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se se základy metody konečných prvků v mechanice kontinua
2. Seznamte se se základy objektového návrhu numerických modelů
3. Vytvořte funkční numerický model řešící úlohu elasticity s vlivem tepelné roztažnosti
4. Model ověřte na jednoduché úloze

Rozsah grafických prací: dle potřeby dokumentace
Rozsah průvodní zprávy: cca 40 až 50 stran

Seznam odborné literatury:

- [1] B.Eckel: Myslíme v jazyku JAVA, Grada Publishing, Praha, 2001, ISBN 80-247-9010-6
- [2] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor: Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis, Elsevier, 2000. ISBN 0-7506-5049-4
- [3] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor: Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 – Solid Mechanics, Elsevier, 2000. ISBN 0-7506-5055-9
- [4] K.Rektorys: Variační metody, Academia Praha 1999, ISBN 80-200-0714-8

Vedoucí diplomové práce: Ing. Dalibor Frydrych, Ph.D.

Konzultant: Ing. Petr Rálek, Ph.D.

Zadání diplomové práce: 20.10.2006

Termín odevzdání diplomové práce: 18. 5. 2007



Vedoucí katedry

Děkan

V Liberci dne 20. 10. 2006

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé diplomové práce a prohlašuji, že **s o u h l a s í m** s případným užitím mé diplomové práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít svou diplomovou práci či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne 18. května 2007

Podpis:

Poděkování

Tato diplomová práce vznikla pod odborným vedením Ing. Dalibora Frydrycha, Ph.D., kterému bych chtěl touto cestou poděkovat za konzultace, nepřeborné množství odpovědí na mé otázky a pomoc při orientaci v modulech výpočetního programu. Poděkování patří i Ing. Petru Rálkovi, Ph.D. za jeho podnětné připomínky ke způsobu napsání diplomové práce a konzultacím z oblasti matematické formulace modelu.

Dále bych chtěl poděkovat Petře Maryškové za svědomité přečtení této práce, korekci chyb a za věcné připomínky ke stylu psaní diplomové práce.

V neposlední řadě děkuji rodině a všem přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali a dodávali energii, bez níž by tato práce nebyla napsána.

Anotace

Cílem diplomové práce je vytvoření modelu elasticity, v němž je zahrnut vliv tepelné roztažnosti materiálu. Algoritmicky je zpracován pomocí Metody konečných prvků (dále jen MKP) a naprogramován v jazyce JAVA.

Model vychází z poznatků o oblasti elastického chování materiálů, která je popsána teorií pružnosti a pevnosti. Samotný výpočet je pak vytvořen variačním přístupem k této problematice. Vyjádření všech vztahů, které vedou na variační formulaci je zde popsáno stručně a práce se více zabývá algoritmizací daného problému a spíše inženýrským přístupem.

Věrohodnost získávaných dat a kalibrace modelu byla zajištěna výpočtem na jednoduchých úlohách, u kterých jsme schopni odvodit analytické nebo alespoň aproximativní řešení. Jde např. o úlohy prostého tahu nebo úlohu vetknutého nosníku, který je vystaven určité změně okolní teploty. Další modelované úlohy jsou ohodnocené spíše z hlediska kvalitativního pohledu.

Forma vytvářeného modelu vychází z Metodiky implementace metody konečných prvků DF²EM, ve které je popsán způsob implementace již existujícího souboru modelů. Jejich návrh splňuje moderní trendy objektového přístupu k programování a lze tedy daný soubor kdykoli rozšířit o další submodely. Ty jsou schopny jak samostatného použití, tak i zahrnutí do komplexnějšího systému.

Klíčová slova:

Metoda konečných prvků, tepelná roztažnost, elasticita, prostorová deformace, stav napětí.

Abstract

The aim of diploma thesis is to create an elasticity model containing the influence of material thermal expansion. The used algorithm is based on the Finite element method and it is programmed in JAVA-language.

The model rests on findings in the field of elastic behavior of materials, described by theory of flexibility and stability. The calculation itself is constructed using variation approach to this problem area. The determination of all relations, leading to variants formulation, is only briefly described, the thesis is more focused on algorithm development and engineering of the given problem.

Data reliability and model calibration were verified against elementary calculations, where we can derive analytic or approximation solution. These include, for example, simple tension cases on the problem of fixed beam, which is exposed to certain change of the surrounding temperature. Other model cases are evaluated more from qualitative point of view.

The form of created model is flowing from Developer's Fab Finite Element Methodology DF²EM. In this methodology is described implementation technique of existing model set. It's conception is in accordance with modern trends of object oriented programming and therefore it can be anytime extended by other submodels. Those submodels can by then used on their own or included into more complex system.

Keywords:

Finite element method, thermal expansion, elasticity, three-dimensional strain, state of stress.

Obsah

Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	9
Seznam označení	10
Úvod	11
1 Fyzikální model	13
1.1 Základní pojmy	13
1.2 Rovnice deformační metody	15
1.3 Okrajové podmínky	18
2 Matematická formulace	19
2.1 Základní rovnice elasticity	20
2.2 Klasické řešení primární úlohy	21
2.3 Slabé řešení primární úlohy	22
2.3.1 Prostory funkcí	22
2.3.2 Slabá formulace	23
3 Numerické vyjádření	25
3.1 Diskretizace oblasti	25
3.2 Aproximace slabého řešení	26
3.3 Numerický výpočet soustavy	28
3.4 Matice tuhosti soustavy	29
3.4.1 Lokální matice tuhosti	29
3.4.2 Globální matice tuhosti	30
3.5 Počáteční deformace - vliv tepelné roztažnosti	30

4 Implementace modelu	32
4.1 Sestavení modelu - popis objektů	33
4.1.1 Task	33
4.1.2 Mesh	34
4.1.3 Topology	34
4.1.4 DFMatrix	35
4.1.5 LocalMatrix	35
4.1.6 Solution	36
4.2 Výpočet modelu	37
4.3 Postprocessing	38
5 Testovací úlohy	39
5.1 Úloha prostého tahu	39
5.1.1 Analytické řešení	39
5.1.2 Řešení MKP	40
5.1.3 Diskuse výsledků	41
5.2 Úloha tepelného namáhání	42
5.2.1 Analytické řešení	42
5.2.2 Řešením MKP	43
5.2.3 Diskuse výsledků	44
5.3 Kombinovaná úloha - bimetalový nosník	44
5.3.1 Analytické řešení	44
5.3.2 Řešení MKP	47
5.3.3 Diskuse výsledků	49
Závěr	50
Reference	51
A Přiložené CD	53

Seznam obrázků

1.1	Definice vektoru posunutí	14
2.1	Oblast řešení a její hranice	19
3.1	Prostorový prvek - čtyřstěn.	25
3.2	Testovací funkce na trojúhelníkovém prvku.	27
4.1	Definice základní úlohy elasticity	33
4.2	UML diagram tříd sítě úlohy	34
4.3	UML diagram topologie modelu	35
4.4	UML diagram tříd na výpočet lokálních matic tuhosti	36
4.5	UML diagram tříd zpracovávajících řešení modelu	37
5.1	Prostý tah - zadání úlohy	40
5.2	Ohodnocení vrcholů nosníku	41
5.3	Řešení úlohy prostého tahu - posunutí v ose x	42
5.4	Tepelné namáhání - zadání úlohy	43
5.5	Řešení úlohy tepelného namáhání - posunutí v ose x	44
5.6	Kombinovaná úloha - zadání úlohy	45
5.7	Ohodnocení vrcholů nosníku - úloha dvou materiálů	48
5.8	Řešení úlohy nosníku ze dvou materiálů - posunutí v ose x	48
5.9	Řešení úlohy nosníku ze dvou materiálů - napětí v ose x	49

Seznam tabulek

5.1	Prostý tah - zadání úlohy	40
5.2	Kombinovaná úloha - zadání	45
5.3	Kombinovaná úloha - výsledné posuny sledovaných bodů.	48

Seznam označení

V pořadí podle použití v textu.

Použité symboly

Značka	Význam
E	modul pružnosti v tahu (někdy také nazývaný Youngův modul)
G	modul pružnosti ve smyku
μ	Poissonovo číslo
α	koefficient tepelné roztažnosti
$\theta = t - t_0$	změna okolní teploty; t - aktuální teplota; t_0 - teplota při nulovém stavu napjatosti
ε	poměrné prodloužení
γ	zkos
σ	normálové napětí
τ	smykové napětí
Ω	oblast v R^3
$\Gamma = \partial\Omega$	hranice oblasti Ω
$\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$	Uzávěr oblasti Ω s hranicí Γ
$C_0^{(\infty)}(\bar{\Omega})$	Prostor funkcí nekonečně spojitě diferencovatelných v $\bar{\Omega}$
E	množina elementů

Zkratky

Zkratka	Význam
MKP	Metoda konečných prvků (V anglické literatuře používána zkratka FEM - Finite Element Method)
JRE	Java Runtime Environment - rozhraní, které umožňuje spouštět programy napsané v Javě
OOP	Objektově orientovaný přístup k programování
UML	Unified Modeling Language - Jednotný modelovací jazyk

Úvod

Budeme-li působit na poddajné těleso vnějšími vlivy, začne se určitým způsobem deformovat. Těmito vlivy nejsou pouze namáhání způsobená vnějšími silovými účinky, ale může to být například změna okolní teploty. Poddajná tělesa na tyto vlivy reagují deformací a vznikem vnitřní napjatosti.

Takto lze stručně definovat úlohu pružnosti a pevnosti, která patří mezi základní technické úlohy, pro které vytváříme počítačové modely. Implementací samostatného modelu, který bere v úvahu ať už mechanické nebo tepelné namáhání tělesa, bylo vytvořeno mnoho. Model elastického chování materiálu s vlivem tepelné roztažnosti, jehož implementace je předmětem této práce, je schopný samostatného použití, ovšem jeho hlavní předností je možnost jednoduché implementace do souboru modelů řešících provázané děje.

Již existující modely, které bychom použili k vytvoření tohoto souboru modelů, nejsou od začátku vyvíjeny s ohledem na jejich spolupráci. Odlišné datové struktury, různý přístup k vytváření a stavbě modelu a z toho plynoucí složitá až nemožná komunikace těchto dílčích částí při integraci málo kdy vedou k úspěšnému vytvoření komplexního modelu. Rozumnější je vystavět model od začátku.

Vytvoření požadovaného modelu je rozděleno do dílčích kroků, které korespondují s kapitolami v této práci. Nejprve se musíme seznámit s fyzikální teorií pevnosti a pružnosti, ze které vychází matematická formulace a odvození slabého řešení úlohy.

Následuje proces aproximace slabého řešení, ze které vychází implementace programu. Abychom splnili požadavek na následné zakomponování modelu do komplexnějšího systému na výpočet provázaných dějů, je nutné dodržet Metodiku implementace metody konečných prvků (dále jen MKP) DF²EM.

Z této metodiky vychází i volba programovacího jazyka, kterým je Java.

Jazyk má sice ze své podstaty překladu kódu, jenž probíhá do pseudojazyka nazývaného byte-code, pomalejší interpretaci. Významným kladem je bezesporu fakt, že tento pseudojazyk je spustitelný na všech platformách opatřených tzv. Java Runtime Environment (JRE). Java se dále vyznačuje vysokou stabilitou a možností převedení výpočtů na distribuované¹ zpracování.

V konečné fázi vývoje je potřeba otestovat správnou funkcionalitu vytvořeného modelu. K tomu byly sestaveny testovací úlohy, na nichž dochází ke kalibraci a verifikaci modelu. O této problematice pojednává poslední kapitola diplomové práce.

¹Výpočet se rozdělí na jednotlivé části, které je možné řešit samostatně a rozešle se na okolní počítače v síti. Výsledek je získán rychleji než na jednoprocesorovém počítači.

1 Fyzikální model

Tato práce se bude zabývat řešením přímé úlohy pevnosti. Je tedy namístě zopakovat několik základních pojmů, které jsou potřeba k vysvětlení matematického popisu dané úlohy. Kompletní odvození jednotlivých závislostí všech veličin je např. v [13] nebo [17].

Veškeré vztahy jsou zapsány pro trojrozměrný případ úlohy elasticity. Budeme tedy uvažovat všechny veličiny závislé na třech prostorových souřadnicích. Zároveň se ale omezíme pouze na statické úlohy.

1.1 Základní pojmy

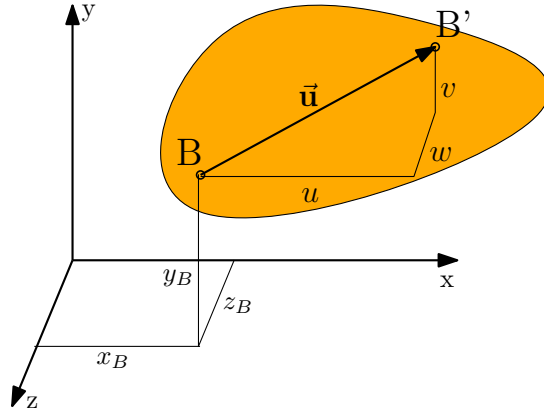
Modely budeme sestavovat pro oblasti souvisle vyplněné hmotou. Taková oblast je souhrnně nazývána kontinuum. To znamená, že v ní neexistují žádné trhliny a to jak na počátku, tak i po deformaci. Dále budeme předpokládat z fyzikálního hlediska nejjednodušší možné chování materiálu v dané oblasti. Tím je homogenní a izotropní materiál:

- **Homogenita** - složení materiálu je nezávislé na umístění zkoumaného bodu v materiálu.
- **Izotropie** - mechanické vlastnosti materiálu jsou ve všech směrech vycházejících z jakéhokoli místa v oblasti stejné.

Pro většinu úloh jsou tato omezení bez problému splnitelná. V některých úlohách budeme ale uvažovat složení oblasti z několika materiálů. V tom případě budeme vyžadovat přesně definované materiálové rozhraní a podmínka homogenity přejde v podmínku homogenního složení dané podoblasti.

Posunutí

Bude-li na těleso působit síla nebo bude-li tepelně namáhané, bude docházet k posunům bodů v materiálu (viz obr. 1.1).



Obrázek 1.1: Vektor posunutí.

Tyto posuny jsou obecně malé v porovnání s rozměrem tělesa a práce se tedy bude zabývat pouze teorií malých deformací. Vektor posunutí můžeme zapsat po složkách

$$\vec{u} = [u, v, w]^T. \quad (1.1)$$

Deformace a napětí

Dalšími veličinami, jejichž velikost je potřeba znát pro náš model, jsou deformace ε a z teorie pevnosti vychází napětí σ . Obě veličiny jsou při ekvivalentním vyjádření v rovnicích zapsány jako tenzor druhého řádu. V našem případě je budeme zapisovat jako vektorovou veličinu, jelikož z izotropního chování materiálu lze usuzovat na rovnost mimodiagonálních hodnot

$$\varepsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T, \quad (1.2)$$

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}]^T. \quad (1.3)$$

Vektor deformace (1.2) je složen z deformací v hlavních směrech, tzv. poměrných prodloužení $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ a ze zkosů $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Mimodiagonální prvky jsou v tomto případě zkosy a rovnost je vždy u prvků ze stejné roviny

tedy $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Stejným způsobem je definován vektor napětí (1.3), kde mluvíme o normálovém napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ a o tečném nebo také smykovém napětí $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, u kterých platí stejná rovnost jako u zkosů v případě vektoru deformace.

1.2 Rovnice deformační metody

Jelikož uvažujeme trojrozměrný prostor, ve kterém řešíme naši úlohu, je potřeba sestavit 15 rovnic. Z nich budeme schopni vyjádřit vektor posunutí závislý na všech prostorových souřadnicích. Následně budeme moci dopočítat i deformaci a napětí. Jednotlivé rovnice jsou bez odvození zapsány v následujícím textu. Jejich podrobný rozpis je uveden např. v [13] nebo [17].

Geometrické rovnice

Tyto rovnice popisují závislost mezi vektorem posunutí (1.1) a vektorem deformace (1.2).

Poměrná prodloužení jsou definována dle následujících vzorců:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Po správném odvození bychom došli i ke vzorcům popisujícím závislost zkosů na posunech v jednotlivých osách:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Zde tedy dostáváme 6 rovnic závislosti deformace na posunutí.

Statické rovnice

Pokud si těleso resp. oblast, pro kterou se chystáme vytvořit model rozdělíme na dostatečně malé podoblasti, můžeme říct, že na každou takovou podoblast působí okolí určitou silou. Další složkou působící na danou podoblast může být objemová síla působící v těžišti dané podoblasti. Takto dostáváme statické nebo také někdy nazývané Cauchyho rovnice

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 . \quad (1.6)$$

Rovnice (1.6) je vyjádřením závislosti napětí na působících silách ve směru osy x . Obdobně lze zapsat rovnice pro zbylé dva směry vhodnou záměnou indexů

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 , \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 . \quad (1.8)$$

Hodnoty X , Y a Z jsou velikosti působících objemových sil. Pro další použití převedeme hodnoty do vektoru objemových sil

$$\mathbf{q} = [X, Y, Z]^T . \quad (1.9)$$

Fyzikální rovnice

Nakonec musíme dát do souvislosti vektor napětí a deformace. K tomu je zapotřebí sestavit soustavu fyzikálních rovnic. Existují dva přístupy. Buď vyjádření vektoru deformace závislého na vektoru napětí a nebo obrácený postup. Zde budeme uvažovat vyjádření vektoru napětí pomocí vektoru deformací.

Nejprve ale musíme zavést ještě jednu fyzikální konstantu a to modul pružnosti ve smyku, který je možno odvodit z modulu pružnosti v tahu (někdy také nazývaný Youngův modul) a Poissonova čísla takto

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} .$$

Nyní lze napsat fyzikální rovnice, které jsou kompletně odvozeny v [13]

$$\sigma_x = 2G \left(\epsilon_x + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \epsilon_{xyz} \right) , \quad (1.10)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} . \quad (1.11)$$

Cyklickou záměnou indexů dostaneme zbylé rovnice

$$\sigma_y = 2G \left(\epsilon_y + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \epsilon_{xyz} \right) , \quad (1.12)$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx} , \quad (1.13)$$

$$\sigma_z = 2G \left(\epsilon_z + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \epsilon_{xyz} \right) , \quad (1.14)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} . \quad (1.15)$$

Ještě musíme zadefinovat poměrnou změnu objemu označenou ve výrazech jako $\epsilon_{xyz} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$.

Jelikož ale chceme ještě uvažovat vliv tepelné roztažnosti, je nutné do rovnic pro napětí σ přidat člen, který ji zahrnuje. Pro náš případ budeme uvažovat koeficient tepelné roztažnosti α do všech směrů stejný. Do rovnice tedy přibude člen zahrnující počáteční deformaci

$$\varepsilon_0 = \alpha \theta , \quad (1.16)$$

kde θ označuje vzrůst teploty v daném bodě.

Fyzikální rovnice pak budou vypadat následovně

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left(\epsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_{xyz} \right) - 2G\epsilon_0 \left(1 + 3 \cdot \frac{\mu}{1-2\mu} \right) , \\ \sigma_y &= 2G \left(\epsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_{xyz} \right) - 2G\epsilon_0 \left(1 + 3 \cdot \frac{\mu}{1-2\mu} \right) , \\ \sigma_z &= 2G \left(\epsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_{xyz} \right) - 2G\epsilon_0 \left(1 + 3 \cdot \frac{\mu}{1-2\mu} \right) .\end{aligned}\quad (1.17)$$

1.3 Okrajové podmínky

Poslední částí je zanesení okrajových podmínek. Je tedy potřeba nějakým způsobem těleso uložit. K tomu slouží okrajové podmínky, které dříve definované rovnice musí bezpodmínečně splnit. Rozlišujeme dvě základní okrajové podmínky:

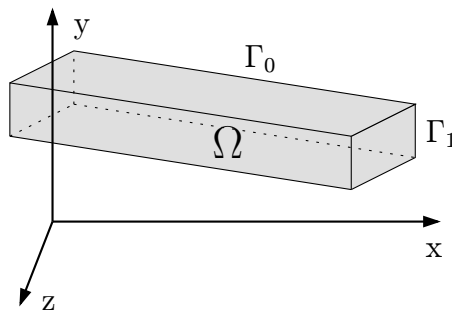
- **Statické** - udávají napětí tělesa při povrchu. Je to tedy silové působení na povrch tělesa nebo na jeho část.
- **Geometrické** - jejich nastavením můžeme docílit známého posunu určitého místa v oblasti. Nejčastěji se zadává nulová hodnota posunu, což znamená, že těleso je v tomto místě chyceno k nějakému rámu nebo jinému nehybnému tělesu (vetknutý nosík a pod.).

2 Matematická formulace

Tato formulace vychází ze vztahů, které byly popsány v předešlé kapitole. Některé rovnice musíme nejprve převést do maticového zápisu, abychom nemuseli zdlouhavě zapisovat všechny členy.

Veškeré vztahy uvedené v této kapitole popisují primární formulaci modelu. Řešením je tedy vektor posunů jednotlivých bodů v oblasti $\Omega \subseteq R^3$. Touto oblastí je myšlen například nosník určitého objemu. Dále budeme mluvit o hranici oblasti Ω . Tu budeme označovat Γ (viz obr. 2.1).

V některých případech bude potřeba rozdělit hranici na několik disjunkt-ních podmnožin z hlediska zadávání okrajových podmínek. Tyto podmnožiny budeme označovat Γ_i a bude platit $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$.



Obrázek 2.1: Oblast řešení a její hranice.

Okrajové podmínky budeme v našem případě uvažovat pouze dvojího typu. Jestliže budeme uvažovat Dirichletovu podmínku, budeme zadávat známý posun určitého bodu na hranici Γ_0 oblasti Ω v příčné souřadnici²

$$u_i = u_{iD} \quad i = x, y, z \quad na \Gamma_0 . \quad (2.1)$$

²Nejčasnější případ je tzv. homogenní Dirichletova podmínka, která zadává nulové posuny na hranici - těleso je v daném směru pevně upnuto.

Druhým typem je Neumannova okrajová podmínka, která udává zatížení vnějšími silami na určité části hranice označené jako Γ_1

$$\sigma_i \cdot n_j = \sigma_{iN} \quad i = 1, \dots, 6 \quad na \Gamma_1, \quad (2.2)$$

kde n_j je vektor vnější normály hranice.

2.1 Základní rovnice elasticity

Statické rovnice (1.6, 1.7, 1.8) převedeme do maticového zápisu. K tomu musíme definovat diferenciální operátor

$$\partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticový zápis statických rovnic vypadá s použitím diferenciálního operátoru a vektoru objemových sil (1.9)

$$\partial \sigma + \mathbf{q} = 0. \quad (2.3)$$

Jelikož objemové síly jsou pro naše výpočty buď nepodstatné nebo známe jejich velikost, rovnou převedeme vektor hodnot na pravou stranu

$$\partial \sigma = -\mathbf{q}. \quad (2.4)$$

Dále převedeme do maticového zápisu Geometrické rovnice (1.4, 1.5)

$$\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Fyzikální rovnice (1.11, 1.13, 1.15, 1.17) zapíšeme v maticovém zápisu pomocí matice tuhosti materiálu \mathbf{D} a patričních deformací. Matice vychází

ze známých materiálových konstant

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)} \cdot \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Pro ekvivalentní zápis musíme ještě definovat vektor počáteční deformace způsobené změnou teploty

$$\varepsilon_0 = [\alpha\theta, \alpha\theta, \alpha\theta, 0, 0, 0]^T. \quad (2.6)$$

Fyzikální rovnice můžeme nyní vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (2.7)$$

Dosazením rovnic (2.5, 2.7) do rovnice (2.4) dostaneme základní rovnici pro výpočet posunutí pro danou oblast

$$\partial \mathbf{D} (\partial^T \mathbf{u} - \varepsilon_0) = -\mathbf{q}. \quad (2.8)$$

2.2 Klasické řešení primární úlohy

Úloha je definována soustavou rovnic (2.8) a okrajovými podmínkami (2.1, 2.2). Jejím řešením je funkce \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^3,$$

která splňuje rovnici (2.8) na Ω a okrajové podmínky (2.1, 2.2) na Γ .

Jelikož jsou všechny požadavky na funkci \mathbf{u} pro praxi zbytečně silné, budeme se nadále zabývat tzv. slabým řešením dané úlohy. To vychází z variačního popisu naší úlohy a řešení rovnice budeme hledat ve funkcionálním smyslu.

2.3 Slabé řešení primární úlohy

Pro správnou interpretaci slabého řešení je potřeba nejprve zavést prostory funkcí, pro které budeme řešení hledat. Podrobné odvození a pojednání o daných prostorech je např. v [15].

2.3.1 Prostory funkcí

Funkce z prostoru $C_0^{(\infty)}(\bar{\Omega})$ jsou nekonečněkrát spojitě diferencovatelné v $\bar{\Omega}$.

Dále budeme uvažovat funkce, které jsou integrovatelné v oblasti Ω a to s druhou mocninou. V tom případě musí existovat konečné integrály

$$\int_{\Omega} u(x) dx, \quad \int_{\Omega} u^2(x) dx.$$

Pro tyto funkce lze zavést:

- **Skalární součin**

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad (2.9)$$

- **Norma**

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)_{\Omega}} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(x) dx} \quad (2.10)$$

- **Vzdálenost dvou funkcí**

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_{\Omega} [u(x) - v(x)]^2 dx} \quad (2.11)$$

Tento vztah udává normu rozdílu obou funkcí.

Prostor integrovatelných funkcí s druhou mocninou v oblasti Ω s metrikou definovanou předpisem (2.11) tvoří metrický prostor $L_2(\Omega)$.

Doplněním metrického prostoru o limity všech cauchyovských posloupností z $(C_0^{(\infty)}, \varrho)$, dostaneme Hilbertův prostor $L^2(\Omega)$. Kompletní odvození např. v [15].

Pro naši úlohu je stěžejní Sobolevův prostor $W_2^{(1)}$, což je úplný obal metrického prostoru $(C_0^{(\infty)}, \varrho_s)$, kde metrika ϱ_s je definována

$$\varrho_s(u, v) = \sqrt{\int_{\Omega} [u(x) - v(x)]^2 + [\nabla u - \nabla v]^2 dx} . \quad (2.12)$$

Jelikož se pohybujeme v trojrozměrném prostoru, oblast Ω je podmnožinou R^3 a Sobolevův prostor je tedy definován jako

$$W_2^{(1)}(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^{(\infty)}(\bar{\Omega}) \mid \varphi \in L_2(\Omega), \nabla \varphi \in [L_2(\Omega)]^3 \} .$$

Při korektní definici úlohy je potřeba zajistit splnění okrajových podmínek. K tomu je potřeba definovat tzv. stopu funkce. Kompletní problematika je popsána např. v [15]. Zde uvedeme pouze definici prostoru, v němž funkce z $W_2^{(1)}(\Omega)$ splňují na části hranice Γ_0 homogenní okrajovou podmínku

$$V(\Omega) = \{ v \mid v \in W_2^{(1)}(\Omega), \quad v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ ve smyslu stop} \} .$$

2.3.2 Slabá formulace

Před samotným zápisem rovnic nejprve zavedeme jednotlivé integrály resp. jejich značení. První rovnost uvádí integrál přes celou oblast - objemový integrál. Druhá rovnost zavádí integrál přes hranici oblasti

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u v \, d\Omega ,$$

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma .$$

Nyní máme všechny předpoklady, abychom mohli definovat naši úlohu. MKP vychází z tzv. slabé formulace. Po řešení \mathbf{u} nepožadujeme úplné splnění diferenciální rovnice (2.8), nýbrž splnění v tzv. slabém (integrálním) smyslu. MKP se zabývá např. [10]. Podklady pro tento článek vycházejí z [3].

Vezmeme rovnici (2.8), vynásobíme ji testovací funkcí $\boldsymbol{\varphi} \in [V(\Omega)]^3$ a integrujeme přes Ω

$$\left(\partial \mathbf{D} (\partial^T \mathbf{u} - \varepsilon_O), \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega = - \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega. \quad (2.13)$$

Rovnice (2.13) vyžaduje v tomto zápise funkce \mathbf{u} dvakrát spojitě diferencovatelné. Použijeme Greenovu větu [11]

$$\left\langle \mathbf{D} (\partial^T \mathbf{u} - \varepsilon_O), \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_D} - \left(\mathbf{D} (\partial^T \mathbf{u} - \varepsilon_O), \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega = - \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega. \quad (2.14)$$

První člen rovnice je nulový (protože $\boldsymbol{\varphi} \in V(\Omega)$). Druhý člen lze rozdělit na dva samostatné integrály a zároveň můžeme část definující počáteční deformaci způsobenou teplotním namáháním převést na pravou stranu

$$\left(\mathbf{D} (\partial^T \mathbf{u}), \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega = \left(\mathbf{D} \varepsilon_O, \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega + \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi} \right)_\Omega. \quad (2.15)$$

Uvažujme funkci $\mathbf{u}^* \in [W_2^{(1)}(\Omega)]^3$, jejíž stopy budou zajišťovat na hranici oblasti Ω splnění Dirichletových okrajových podmínek

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_D \quad \text{na } \Gamma_0$$

a funkci $\mathbf{u}_0 = (u_1, u_2, u_3) \in [V(\Omega)]^3$, která splňuje rovnici (2.15) pro všechny testovací funkce $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in [V(\Omega)]^3$. Slabým řešením úlohy (2.8) s okrajovými podmínkami (2.1, 2.2) potom nazveme funkci

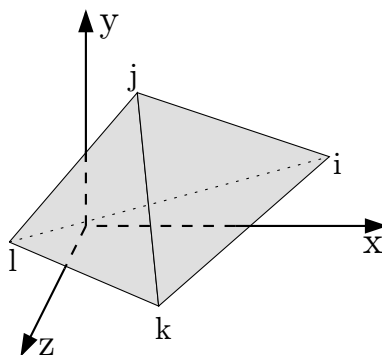
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^*.$$

3 Numerické vyjádření

V předchozí kapitole jsme provedli slabou formulaci našeho modelu. Nyní musíme tuto formulaci převést do numerického vyjádření, které bude výchozím modelem pro programovou část. K tomu použijeme MKP, která hledá aproximaci slabého řešení úlohy pomocí bazických funkcí, které jsou definovány na množině konečných prvků. Tato kapitola vychází z poznatků uvedených v knihách [10] a [18].

3.1 Diskretizace oblasti

Pro všechny úlohy modelu budeme používat rozdělení oblasti Ω na jednotlivé elementy (konečné prvky) typu čtyřstěn (obr. 3.1). Tento prvek je nejjednodušším prostorovým elementem. Není ovšem nejlepší volbou co se týče přesnosti výpočtu. Na druhou stranu můžeme tímto prvkem jednoduše zdiskretizovat takřka jakoukoli oblast. Vyplnění oblasti Ω čtyřstěny je dobře zautomatizovatelné a dají se tedy použít externí nástroje. V našem případě používáme soubory generované programem GMSH.



Obrázek 3.1: Prostorový prvek - čtyřstěn.

Nutná podmínka pro správnou funkci následného programu je ohodnocení čtyřstěnu v levotočivém smyslu. To znamená, že při pohledu od prvního

bodu čtyřstěnu musí následující bod přecházet postupně do ostatních bodů levotočivě.

Síť vytvořená přímo programem GMSH podléhá standardům, které je potřeba dodržovat pro správnou funkci algoritmu MKP. Uvedeme si zde alespoň dvě základní omezení při tvorbě sítě

- Každý prvek v síti může mít v případě čtyřstěnu maximálně tři stěny na hranici oblasti Ω . Pokud by tomu tak nebylo, znamenalo by to, že oblast, ve které hledáme řešení, je aproximována pouze jedním elementem.
- Libovolné dva sousední prvky musí mít společný buď jeden vrchol, jednu hranu a nebo celou jednu stěnu. Není tedy možné, aby sousední prvky měly společnou pouze část výše zmiňovaných konstrukčních součástí.

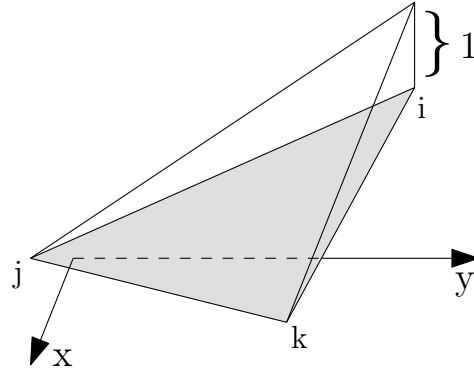
3.2 Aproximace slabého řešení

Prvním krokem při sestavování modelu je definice soustavy bazických (testovacích) funkcí pro každý element. Lineární kombinací těchto funkcí dostaneme hledanou aproximaci slabého řešení.

MKP si vybírá tyto funkce mezi funkcemi s malým supportem. To znamená, že funkce je definována pouze na jednom elementu. Pro všechny ostatní elementy nabývá hodnoty 0. Pro každý element budeme definovat čtyři funkce. Pro náš případ se spokojíme s lineárními funkcemi (3.1). Každá bude definována pro jeden vrchol, v němž bude mít hodnotu 1 a v ostatních vrcholech bude nabývat hodnoty 0 (viz obr. 3.2)³

$$\varphi_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \alpha_{2i}y + \alpha_{3i}z . \quad (3.1)$$

³Ukázka testovací funkce je pouze pro trojúhelníkový prvek. Pro čtyřstěn by byl tento náčrt nepřehledný, jelikož by se jednalo o zobrazení 4 rozměrů.



Obrázek 3.2: Testovací funkce na trojúhelníkovém prvku.

Koeficienty ve (3.1) dostaneme inverzí matice, jejímiž prvky jsou souřadnice jednotlivých vrcholů čtyřstěnu

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} & \alpha_{04} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix}.$$

Na daném elementu budeme hledat pro rovnici (2.15) aproximaci posunutí ve tvaru

$$u_i|_e \approx \tilde{u}_i^e = \sum_{j=1}^4 \varphi_j^e a_j^i \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

kde a_j^i reprezentuje posunutí ve vrcholech elementu

$$a^i = \begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix}.$$

Aproximaci posunutí na celé diskretizaci oblasti Ω můžeme zapsat jako

$$\tilde{u}_i = \sum_{e \in E} \tilde{u}_i^e, \quad (3.3)$$

kde E je množina všech elementů z oblasti Ω .

Rovnici (2.15) můžeme přepsat pomocí aproximací do tvaru

$$\left(\mathbf{D} (\partial^T \tilde{\mathbf{u}}), \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_{\Omega} = \left(\mathbf{D}_{\varepsilon_O}, \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_{\Omega} + \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi} \right)_{\Omega}, \quad (3.4)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^4 \quad (3.5)$$

je vektor aproximovaných posunutí a

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2) \quad (3.6)$$

je vektor testovacích funkcí.

Jelikož v našem modelu nebudeme uvažovat vliv objemového zatížení, můžeme poslední člen z rovnice (3.4) vynechat. Rovnice tedy bude zahrnovat pouze vliv počáteční deformace způsobené tepelným namáháním

$$\left(\mathbf{D} (\partial^T \tilde{\mathbf{u}}), \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_{\Omega} = \left(\mathbf{D}_{\varepsilon_O}, \partial^T \boldsymbol{\varphi} \right)_{\Omega}. \quad (3.7)$$

3.3 Numerický výpočet soustavy

Rovnice (3.7) vede na soustavu lineárních rovnic, které se dají zapsat

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

což je základní rovnice MKP.

Vektor \mathbf{x} neznámých hodnot posunutí v uzlech diskretizace dostaneme

⁴Složky korespondují s posuny v hlavních směrech $u_1 \approx u$, $u_2 \approx v$, $u_3 \approx w$ uvedenými v (1.1)

po vyřešení soustavy rovnic. Matici tuhosti \mathbf{K} i vektor pravých stran \mathbf{f} budeme definovat v následujícím textu. Pro řešení soustavy lze v nejjednodušším případě použít třeba Gaussovu eliminaci. Tato oblast není předmětem této práce, a proto se o možnostech řešení dané soustavy nebudeme dále zmiňovat.

3.4 Matice tuhosti soustavy

3.4.1 Lokální matice tuhosti

Lokální matice tuhosti⁵ soustavy vychází z členu na levé straně rovnice (3.7). Blokově ji lze zapsat

$$\mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} K_{11}^e & \cdots & K_{14}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{41}^e & \cdots & K_{44}^e \end{pmatrix},$$

kde každý prvek je samostatnou maticí hodnot daných předpisem, který vychází ze skalárního součinu na levé straně rovnice (3.7)

$$K_{ij}^e = \int_e \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j de, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.9)$$

Ještě je nutné zavést matici diferenciálů bazických funkcí pro daný vrchol čtyřstěnu označenou v rovnici (3.9) \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_i = \boldsymbol{\partial}^T \varphi_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3i} \\ 0 & \alpha_{3i} & \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} & 0 & \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{1i} & 0 \end{pmatrix}$$

⁵Pro každý element $e \in E$ je definována samostatná matice tuhosti - lokální matice tuhosti.

a pro připomenutí uvedme, že \mathbf{D} je matice tuhosti materiálu, ze kterého se skládá příslušný element.

Lokální matice tuhosti má pro náš případ dimenzi $\mathbf{K}^e \in R^{12,12}$. Každý blok je tedy velikosti $K_{ij}^e \in R^{3,3}$. Matice \mathbf{K}^e je symetrická.

3.4.2 Globální matice tuhosti

Sestavením globální matice tuhosti se zabývá např. [10] pomocí tzv. kódových čísel. Pro naši potřebu bude stačit, když zde uvedeme závislost globální a lokální matice tuhosti

$$\mathbf{K}_{rs} = \sum_e K_{ij}^e, \quad (3.10)$$

kde daný i-tý resp. j-tý uzel odpovídá uzlům r resp. s v globálním číslování. Globální matici lze blokově zapsat

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \cdots & \mathbb{K}_{1n} \\ \mathbb{K}_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \mathbb{K}_{rs} & \vdots \\ \mathbb{K}_{n1} & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

kde n je počet uzlů.

3.5 Počáteční deformace - vliv tepelné roztažnosti

Dále musíme definovat počáteční deformaci, která je způsobena vlivem změny vnější teploty a tedy tepelnou roztažností materiálu. Budeme opět vycházet z rovnice (3.7), nyní se ovšem zaměříme na její pravou stranu. Tento člen lze zapsat

$$\mathbf{f}_i^e = \int_e \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \varepsilon_0 de. \quad (3.12)$$

Rovnice (3.12) udává počáteční deformaci opět pouze na jednom elementu. Stejně jako u matice tuhosti je potřeba hodnoty převést do vektoru pravé strany výsledné soustavy pomocí kódových čísel

$$\mathbf{f}_r = \sum_e f_i^e, \quad (3.13)$$

kde, analogicky k sestavení globální matice tuhosti, odpovídá globální číslo uzlu r hodnotě lokálního čísla uzlu i .

4 Implementace modelu

Převedení numerického modelu do programovacího jazyka lze různými způsoby. Je možné vytvořit monolitickou aplikaci, která bude řešit jednu konkrétní úlohu spolehlivě a hlavně rychle. Kdybychom šli touto cestou, dostali bychom se mimo oblast použitelnosti fragmentů tohoto modelu i v jiných úlohách. Jelikož jedním z cílů této diplomové práce je následné začlenění modelu do většího celku, musíme jít druhou cestou - objektově orientovaného přístupu (dále jen OOP).

OOP dává programátorům především možnost znovupoužitelnosti částí kódu. Těmto částem se obecně říká objekty, které přenášejí entity ze světa, jak jej známe, do programovacího jazyka.

Implementace modelu elasticity, popsaneho v této práci, vychází z metodiky [2]. Ta udává základní strukturu souboru modelů, k nimž přibude i tento, a proto je nutné dodržovat jistá pravidla, aby bylo možné model jednoduše zakomponovat k ostatním.

Nebudeme zde uvádět popis již existujících částí modelu, které lze dle pravidla znovupoužitelnosti bezproblému převzít. Další části budeme muset mírně upravit, aby splňovali požadovanou funkcionalitu. Nakonec bude potřeba dodefinovat ty části - objekty, které zatím nejsou k dispozici.

Tato kapitola bude kopírovat proces sestavení úlohy. Budeme tedy charakterizovat jednotlivé objekty⁶ ve chvíli, kdy je poprvé použijeme. Podrobné popisy funkcí jednotlivých objektů jsou k dispozici v komentovaných zdrojových kódech, které jsou na přiloženém CD-ROM.

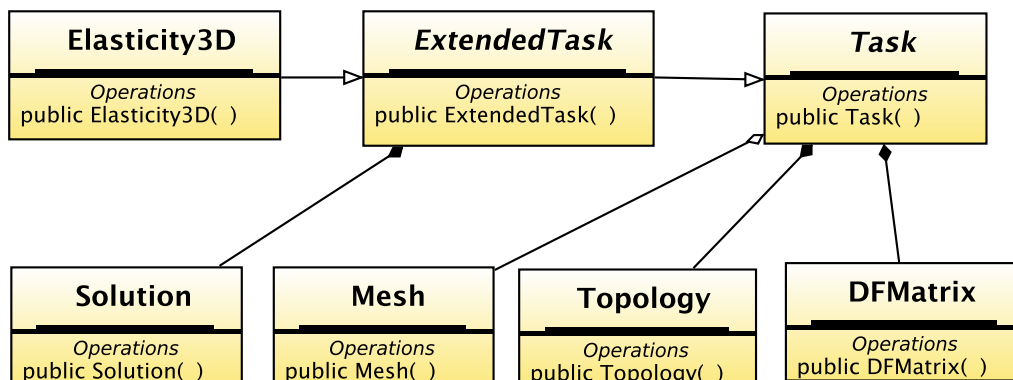
⁶Budeme popisovat pouze objekty nezbytně nutné ke správnému výpočtu úlohy. Nebudeme se tedy zabývat objekty např. pro výpis průběhu sestavování úlohy na obrazovku a podobnými.

4.1 Sestavení modelu - popis objektů

U každého objektu resp. souboru tříd, ze kterých je vytvořena instance objektu, je nejprve uveden package⁷ a následuje stručný popis funkcionality objektu v některých případech doplněný o UML⁸ diagram viz [9]. Půjdeme směrem odshora dolů - tedy od hlavního objektu, který řídí proces výpočtu, k objektům, které zabezpečují dílčí funkce modelu.

4.1.1 Task

Package: task; task.primal.elasticity



Obrázek 4.1: Definice základní úlohy elasticity

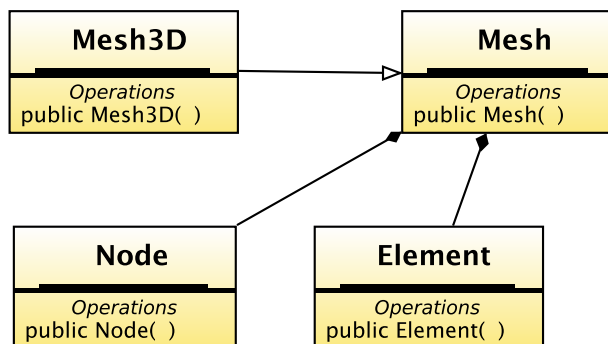
Objekt vytvořený z potomků třídy Task je základním kamenem celého modelu. Definuje jednotlivé kroky sestavení úlohy od načtení sítě, přes sestavení matice tuhosti modelované úlohy až k výpočtu. Posledním krokem je reprezentace výsledků modelu ať už cestou textového výstupu nebo grafická interpretace.

⁷Umístění souboru s diskutovanou třídou. Někdy bude uvedeno více míst. V tom případě jde o package, které obsahují třídy s podobnou funkcionalitou.

⁸Zkratka UML - Unified Modeling Language, Jednotný Modelovací Jazyk. Používá se k návrhům struktury software zejména před zahájením vývoje.

4.1.2 Mesh

Package: mesh



Obrázek 4.2: UML diagram tříd sítě úlohy

Pro vytvoření sítě budeme používat třídy odvozené z třídy Mesh. V nej-jednodušších případech lze síť vytvořit pomocí dostupných metod na definici elementů a nodů sítě. Jelikož potřebujeme u některých úloh jemnou dis-kretizaci, budeme využívat při definování sítě program GMSH [4]. Pomocí něj rychle vytvoříme potřebnou síť a tu pak načteme pomocí objektu vy-tvořeného z třídy GmshReader.

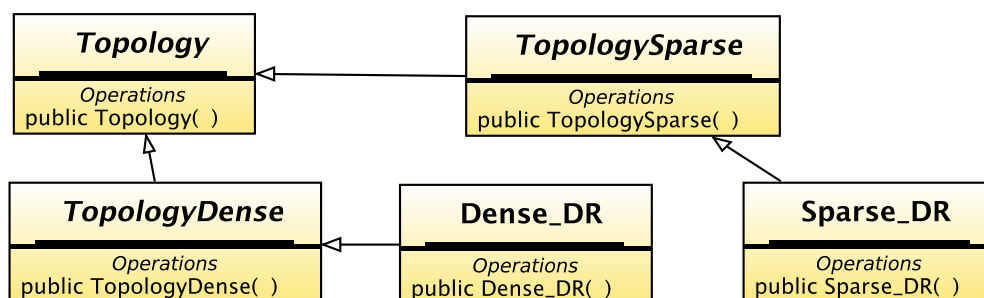
V našem modelu budeme konkrétně využívat třídu Mesh3D, která udržuje informace o síti definované v trojrozměrném prostoru. Pole elementů, které instance této třídy bude držet, později použijeme pro vytvoření lokálních matic tuhosti.

4.1.3 Topology

Package: topology; topology.primalVector

Sestavením topologie modelu se rozumí alokace paměti pro systém rovnic. Objekt má přístup k síti, která je uložená v objektu Mesh. V programu je možné vybrat si ze dvou druhů ukládání dat:

- **Dense** - plný zápis dat. Ukládá se celá matice i s nulovými prvky.



Obrázek 4.3: UML diagram topologie modelu

- **Sparse** - zkrácený zápis dat. Ukládají se pouze data, která jsou nenulová v rámci matice tuhosti. Šetří se tak systémové zdroje.

Samotné třídy Dense_DR a Sparse_DR jsou postaveny tak, aby je bylo možno použít i pro jiné úlohy. Stačí jim pouze předat informace o síti a kolik rovnic - délka vektoru řešení - je příslušných k jednomu vrcholu sítě.

Výstupem objektu topologie je objekt DFMatrix, ve kterém jsou uložena veškerá data matice tuhosti soustavy.

4.1.4 DFMatrix

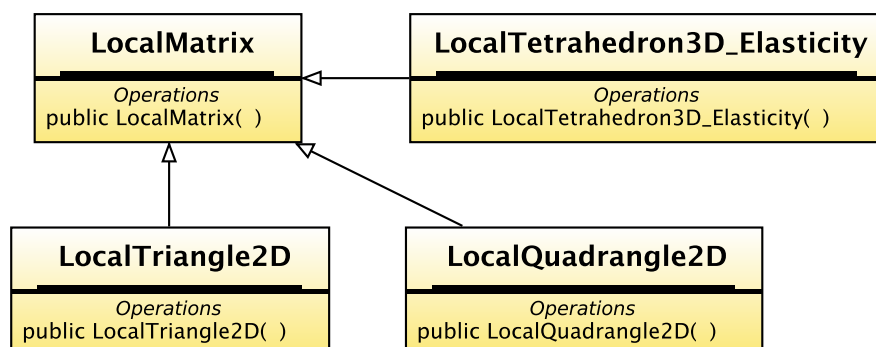
Package: sle

Zde jsou uložena hlavní data celého modelu - tedy matice tuhosti soustavy. Objekt obsahuje metody, pomocí nichž dochází k zápisu dat do globální matice tuhosti. K tomu slouží soubor tříd, které udržují informace o kódových číslech (např. CodeNumber, CodeNumberElement atd.). Ta jsou použita pro správné přiřazení lokálních matic do globální matice.

4.1.5 LocalMatrix

Package: math; task.test.triangle

Nad každým elementem je potřeba spočítat lokální matici tuhosti. K tomu slouží objekty odvozené právě od třídy LocalMatrix.



Obrázek 4.4: UML diagram tříd na výpočet lokálních matic tuhosti

Jelikož může být síť složena z více typů prvků, pro které se počítá lokální matice odlišným způsobem, máme pro každý prvek samostatnou třídu. Není problém nadefinovat množství dalších tříd, které budou počítat lokální struktury např. pomocí lepších aproximačních funkcí.

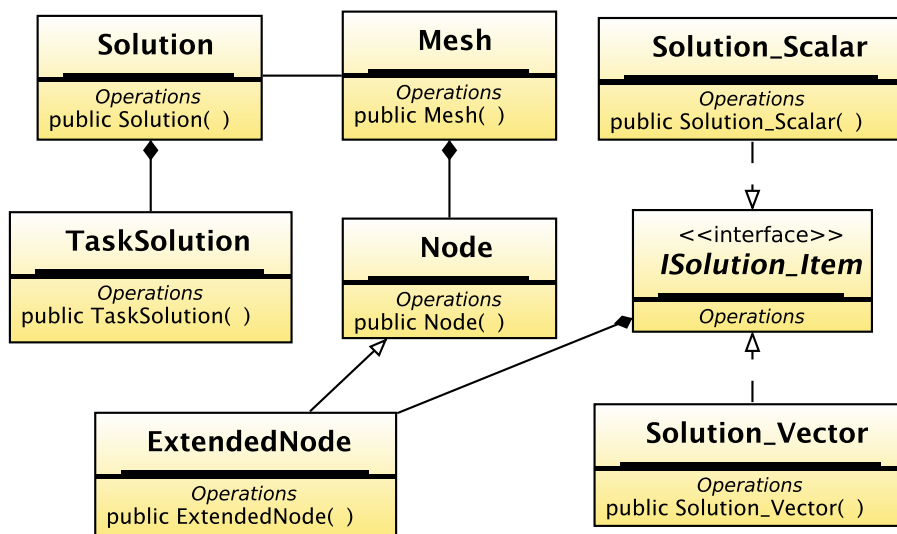
4.1.6 Solution

Package: solution

Výsledné hodnoty modelu je potřeba zobrazit. Nejjednodušším způsobem je hodnoty posunů vypsát na obrazovku. Tento způsob je do jisté míry nepřehledný. Proto vznikl soubor tříd (viz obr. 4.5), které se starají o zobrazení výsledných hodnot grafickým způsobem. K tomu je používán program GMSH [4] a jeho postprocessingové rozhraní.

Základní třídou určenou pro zobrazování výsledků je Solution. Do ní se vkládají jednotlivá řešení modelu. Daným řešením může být například posun bodů oblasti v ose x . Pro každé řešení je vytvořen objekt třídy Task-Solution. Ten uchovává informace o daném řešení, jeho identifikační údaje a typ řešení. Typem řešení může být buď skalární, vektorová nebo tenzorová veličina.

Hodnoty řešení jsou uloženy přímo v objektu ExtendedNode, což je objekt



Obrázek 4.5: UML diagram tříd zpracovávajících řešení modelu

vrcholu elementu definovaného v třídě Mesh. Data nese objekt, který implementuje rozhraní `ISolution_Item`. Použití rozhraní nám poskytuje možnost polymorfizmu [1], [5].

Nakonec stačí ve třídě `TaskSolution` zavolat metodu, která přímo vygeneruje soubor výsledných hodnot, který můžeme zobrazit v programu GMSH.

4.2 Výpočet modelu

Pro samotný výpočet soustavy rovnic lze použít dvě již implementované výpočetní třídy:

- Gaussova eliminace s částečnou pivotací
- Choleského rozklad

Za vstupní data si obě třídy berou globální matici tuhosti a vektor pravé strany. Po vypočtení soustavy vracejí výsledek jako pole čísel typu `double`.

Objekt výpočtu metodou Choleského rozkladu má jedno omezení. Matice tuhosti soustavy musí být ve zkráceném zápise. Objekt tedy musí být potomkem třídy `TopologySparse` (viz obr. 4.3).

4.3 Postprocessing

Pro zobrazení výsledných hodnot byl zvolen postprocessingový modul programu GMSH. Zvolen byl zejména z důvodu jednoduchého předávání výsledných hodnot zobrazovači. Program GMSH umí zobrazit data, která jsou předána ve speciálním formátu textového souboru, který je popsán v [4]. Tento formát je generován již dříve popsanou třídou `TaskSolutin`.

5 Testovací úlohy

Tato kapitola se zabývá verifikací⁹ vytvořeného modelu. Tento proces je postaven na porovnání vypočtených výsledků vytvořeným modelem s výsledky známými. Tedy vypočtenými analytickým řešením. Toho lze dosáhnout pouze v určitých speciálních případech. Jednotlivými modelovými úlohami se zabývají samostatné podkapitoly, kde je nejprve kompletně popsána modelová úloha a následuje krátký popis analytického řešení s výsledky. Nakonec jsou výsledná data porovnána s výstupem z naprogramovaného modelu a provedena diskuse.

Úlohy jsou postaveny tak, aby se nejprve ověřila správnost řešení závisejícího pouze na jednoduchých okrajových podmínkách. To znamená, že nejprve bude model počítán bez vlivu změny okolní teploty a jeho přetvoření bude závislé pouze na působení vnějších silových účinků. Další úloha bude naopak předpokládat pouze změnu vnějšího teplotního pole.

V poslední úloze budeme uvažovat dvě okrajové podmínky. Na nosník bude působit jak počáteční deformace z vlivu tepelné roztažnosti, tak homogenní Dirichletova okrajová podmínka.

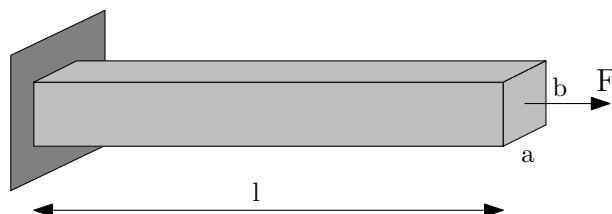
5.1 Úloha prostého tahu

První testovací úloha se zabývá prostým tahem. Jde o kontrolu správného výpočtu v závislosti na působení určité síly (viz obr. 5.1). Úloha je počítána s parametry dle zadání (viz. tab. 5.1).

5.1.1 Analytické řešení

V této úloze se nám jedná o zjištění prodloužení nosníku v závislosti na namáhání silou \mathbf{F} . Ta způsobí poměrné prodloužení pouze v ose x . Pro dané prodloužení na našem nosníku existuje analytické řešení ve tvaru

⁹Verifikací se v modelování rozumí proces kvalitativního hodnocení výstupu modelu.



Obrázek 5.1: Prostorové uložení úlohy počítající prostý tah.

Koeficient	Hodnota	Popis koeficientu
l [m]	1	Délka nosníku
a [m], b [m]	0,1	Rozměrové délky podle zadání v obrázku
E [MPa]	$2,1 \cdot 10^5$	Youngův modul pružnosti
μ [-]	0,3	Poissonovo číslo
F [kN]	100	Tahová síla

Tabulka 5.1: Parametry zadání úlohy prostého tahu.

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{Fl}{Eab}. \quad (5.1)$$

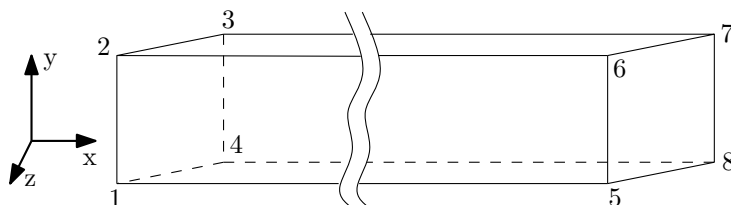
Dosadíme-li do vzorce (5.1) parametry úlohy z (tab. 5.1), zjistíme posunutí na volném konci tyče

$$\Delta l = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot 0,1} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Tyč se tedy v našem případě prodloužila o $4,8 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

5.1.2 Řešení MKP

Oblast pro diskretizování pomocí konečných prvků je dosti jednoduchá. Daný nosník by se dal aproximovat jednoduše pomocí 5 čtyřtětů. Abychom nemuseli složitě zadávat okrajové podmínky, využijeme jednoduchosti této úlohy a body, ve kterých budeme nosník upínat a ve kterých budeme zadávat působící sílu (viz obr. 5.2), si označíme následovně:



Obrázek 5.2: Ohodnocení vrcholů nosníku

- **Vetknutí** - body 1, 2, 3 a 4 - nulový posun ve všech směrech.
- **Působící síla** - body 5, 6, 7 a 8 - musíme zabezpečit, aby se na této podstavě nevyskytovaly žádné další body.

Velikost síly působící na nosník rovnoměrně rozložíme do všech bodů na podstavě, kde daná síla působí. Podmínka tedy bude zadána na každý z bodů 5, 6, 7 a 8 a to hodnotou $\frac{F}{4}$. V případě většího počtu bodů na této podstavě je nutno sílu rozdělit rovnoměrně do všech bodů.

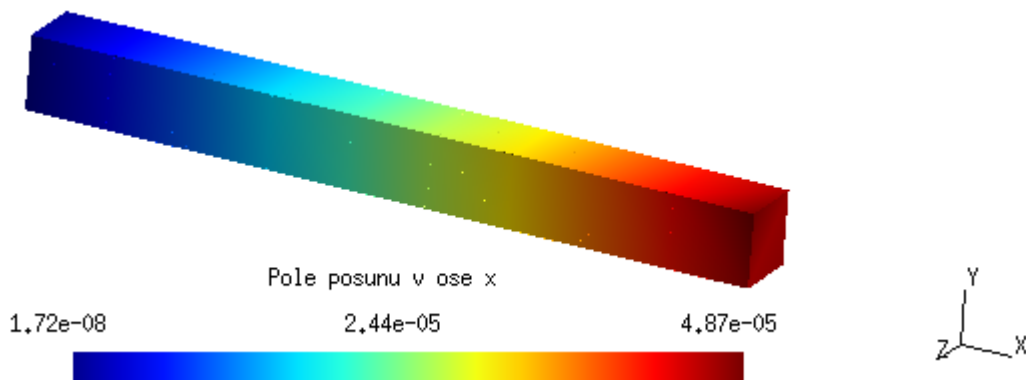
Po výpočtu modelu MKP dostaneme hodnoty posunutí na celém nosníku. Nás však zajímají hodnoty zejména na bodech 5 - 8

$$\begin{aligned} u_5 &= 4,74 \cdot 10^{-5} \text{ m} , & u_6 &= 4,66 \cdot 10^{-5} \text{ m} , \\ u_7 &= 4,87 \cdot 10^{-5} \text{ m} , & u_8 &= 4,66 \cdot 10^{-5} \text{ m} . \end{aligned}$$

5.1.3 Diskuse výsledků

Mírné odchylky od analytického řešení jsou způsobeny zejména hrubou diskretizací nosníku na konečné prvky. Pokud bychom provedli jemnou diskretizaci, dostali bychom na podstavě mnohem více bodů a silové působení by bylo možné rozložit lepším způsobem na celou podstavu nosníku.

I tak je ale výpočet dosti přesný. Pokud bychom zprůměrovali hodnoty posunů v jednotlivých bodech podstavě, dostaneme hodnotu



Obrázek 5.3: Řešení úlohy prostého tahu - posunutí v ose x

$$\bar{u} = 4,73 \cdot 10^{-5} \text{ m} .$$

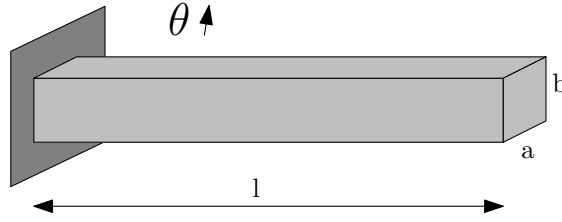
Rozdíl hodnoty vypočtené analyticky a vytvořeným modelem je velmi malý a vzhledem k rozměru úlohy téměř zanedbatelný, proto lze prohlásit, že tento model dobře aproximuje analytické řešení.

5.2 Úloha tepelného namáhání

Pro zadání úlohy tepelného namáhání použijeme opět stejný nosník jako v předchozím případě. Tentokrát na něj nebudeme působit silou, ale změníme okolní teplotu. Tím dojde k deformaci vlivem tepelné roztažnosti. Schéma úlohy (viz obr. 5.4). Parametry zadání jsou totožné s předchozí úlohou (viz tab. 5.1), změnu teploty budeme uvažovat $\theta = 100 \text{ K}$ a koeficient tepelné roztažnosti materiálu $\alpha = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

5.2.1 Analytické řešení

Budeme tedy sledovat prodloužení nosníku v závislosti na změně okolní teploty. Vycházet budeme ze vztahu, který nám udává délku nosníku po změně teploty



Obrázek 5.4: Prostorové uložení úlohy tepelného namáhání.

$$l = l_0 + l_0 \cdot \alpha \theta , \quad (5.2)$$

z něhož lehce dostaneme hodnotu poměrného prodloužení jako

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \theta . \quad (5.3)$$

Pro námi definované parametry úlohy dostaneme posunutí volného konce nosníku, což je hodnota poměrného prodloužení

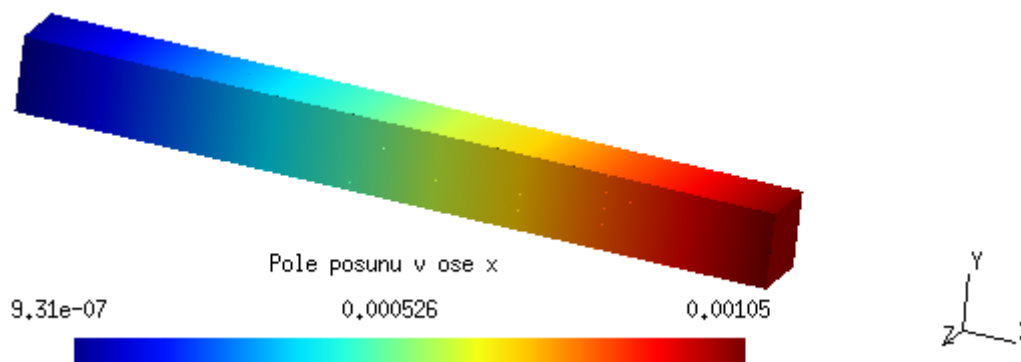
$$\Delta l = 1 \cdot 1,05 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} .$$

Volný konec nosníku se tedy posune přibližně o 1 mm při vzrůstu okolní teploty o 100 K.

5.2.2 Řešením MKP

Síť konečných prvků lze v této úloze použít totožnou s úlohou definovanou v předchozím článku. Opět provedeme upnutí nosníku v bodech 1, 2, 3 a 4. Tentokrát ale nebudeme působit žádnou silou. Do modelu zadáme zvýšení okolní teploty a vypočteme posuny bodů 5, 6, 7 a 8:

$$\begin{aligned} u_5 &= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} , & u_6 &= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} , \\ u_7 &= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} , & u_8 &= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} . \end{aligned}$$



Obrázek 5.5: Řešení úlohy tepelného namáhání - posunutí v ose x

5.2.3 Diskuse výsledků

V tomto případě je shoda vypočtené hodnoty MKP a analytického řešení vzácně dokonalá. A to i za předpokladu výpočtu na dosti hrubé síti¹⁰. Výsledné hodnoty posunů v modelu, jak je vypočítá MKP, jsou na (obr. 5.5).

5.3 Kombinovaná úloha - bimetalový nosník

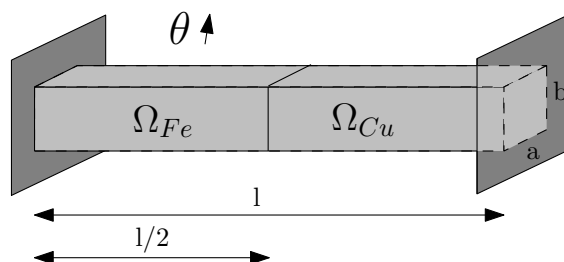
Poslední modelová úloha počítá opět posuny bodů v nosníku. Ten je tentokrát složen ze dvou materiálů. Označení bimetal je zde pouze informativní. Nemá nic společného s bimetalem tak, jak ho známe.

Schéma uložení nosníku je zachyceno na (obr. 5.6). Všechny parametry úlohy jsou zadány v (tab. 5.2).

5.3.1 Analytické řešení

V této úloze budeme počítat posun středové roviny (rovina styku oblastí z různého materiálu) nosníku a také zjistíme jeho napjatost. Nosník vetkneme na obou koncích. Okolní teplota se zvedne a dojde tedy k dilataci nosníku

¹⁰Síť byla použita nejhrubší možná. Tedy hrana např. mezi body 5 a 6 je obsazena pouze jedním konečným prvkem. V případě jemnějšího dělení by byla tato hrana obsazena větším počtem prvků.



Obrázek 5.6: Prostorové uložení kombinované úlohy.

Koeficient	Hodnota	Popis koeficientu
l [m]	2	Délka nosníku
a [m], b [m]	0,1	Rozměrové délky podle zadání v obrázku
$E_{\Omega_{Fe}}$ [MPa]	$2,0 \cdot 10^5$	Youngův modul pružnosti
$E_{\Omega_{Cu}}$ [MPa]	$1,0 \cdot 10^5$	
$\mu_{\Omega_{Fe}}$ [-]	0,3	Poissonovo číslo
$\mu_{\Omega_{Cu}}$ [-]	0,34	
$\alpha_{\Omega_{Fe}}$ [K^{-1}]	$1,05 \cdot 10^{-5}$	Koeficient tepelné roztažnosti
$\alpha_{\Omega_{Cu}}$ [K^{-1}]	$1,65 \cdot 10^{-5}$	
θ [K]	100	Vzrůst okolní teploty

Tabulka 5.2: Parametry zadání kombinované úlohy.

a tedy k vzniku vnitřního pnutí.

Abychom odvodili analytické řešení, je potřeba zavést rovnice rovnováhy

$$R_{Fe} = R_{Cu} , \quad (5.4)$$

které zavádějí rovnost reakčních sil na obou vetknutých stranách.

Dále je potřeba zavést deformační podmínku. Jelikož je nosník pevně upnut mezi dvě nehybné plochy, nemůže tedy měnit svou délku. Je tedy nutné, aby součet změn v jednotlivých materiálech byl nulový

$$\Delta l_{Fe} + \Delta l_{Cu} = 0 , \quad (5.5)$$

kde hodnotami l_{Fe}, l_{Cu} je rozuměna délka jednotlivých oblastí.

Z Hookova zákona vycházejí další rovnice o poměrném prodloužení s vlivem prodloužení způsobeného tepelnou roztažností

$$\Delta l_{Fe} = \frac{R_{Fe} l_{Fe}}{E_{Fe} S} + \alpha_{Fe} \theta l_{Fe} , \quad (5.6)$$

$$\Delta l_{Cu} = \frac{R_{Cu} l_{Cu}}{E_{Cu} S} + \alpha_{Cu} \theta l_{Cu} . \quad (5.7)$$

Sečteme-li rovnice (5.6, 5.7), v nichž ještě upravíme reakční sílu dle rovnosti (5.4), dostaneme rovnici reakčních sil

$$R_{Fe} = R_{Cu} = - \frac{(l_{Fe} \alpha_{Fe} + l_{Cu} \alpha_{Cu}) \theta}{\left(\frac{l_{Fe}}{E_{Fe} S} + \frac{l_{Cu}}{E_{Cu} S} \right)} . \quad (5.8)$$

Vyjdeme-li z předpokladu, že $l_{Fe} = l_{Cu} = \frac{l}{2}$, můžeme rovnici (5.8) přepsat do kompaktnější podoby

$$R_{Fe} = R_{Cu} = - \frac{(\alpha_{Fe} + \alpha_{Cu}) \theta S}{\frac{1}{E_{Fe}} + \frac{1}{E_{Cu}}} . \quad (5.9)$$

Po dosazení vypočteme velikost reakční síly a tu dosadíme do rovnic (5.6, 5.7) a vypočteme posunutí

$$R_{Fe} = R_{Cu} = -\frac{(1,05 \cdot 10^{-5} + 1,65 \cdot 10^{-5}) \cdot 100 \cdot 0,01}{\frac{1}{2,0 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{1,0 \cdot 10^{11}}} = -1,8 \cdot 10^6 \text{ N} ,$$

$$\Delta l_{Fe} = \frac{-1,8 \cdot 10^6 \cdot 1}{2,0 \cdot 10^{11} \cdot 0,01} + 1,05 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} ,$$

$$\Delta l_{Cu} = \frac{-1,8 \cdot 10^6 \cdot 1}{1,0 \cdot 10^{11} \cdot 0,01} + 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 1 = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} .$$

Z výsledků je patrné, že deformační podmínka byla splněna. Nyní zbývá pouze vypočítat napětí v nosníku dle známého vzorce

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Fe} = \frac{R_{Fe}}{S} ; \quad \sigma_{Cu} = \frac{R_{Cu}}{S} . \quad (5.10)$$

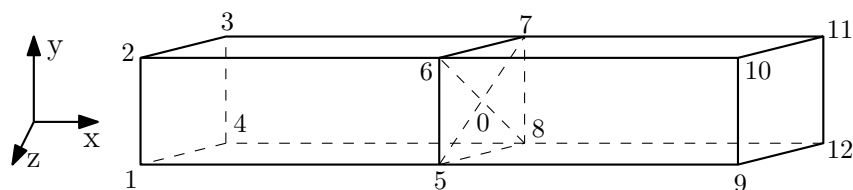
Po dosazení dostáváme hodnotu

$$\sigma_{Fe} = \sigma_{Cu} = \frac{-1,8 \cdot 10^6}{0,01} = -1,8 \cdot 10^2 \text{ MPa} .$$

5.3.2 Řešení MKP

Při vytváření sítě pro tuto úlohu, budeme definovat body jak pro zadání homogenní okrajové podmínky na podstavách nosníku, tak si nadefinujeme i body na rozhraní obou materiálů. Tento postup se bude hodit následně při porovnávání výsledků. Základní body oblasti tedy nadefinujeme podle (obr. 5.7).

Body 1 - 4 a 9 - 12 zbavíme všech stupňů volnosti a okolní teplotu zvýšíme o danou hodnotu. První částí řešení bude hodnota posunů. Tu budeme hledat na bodech 0 a 5 - 8 (viz tab. 5.3).

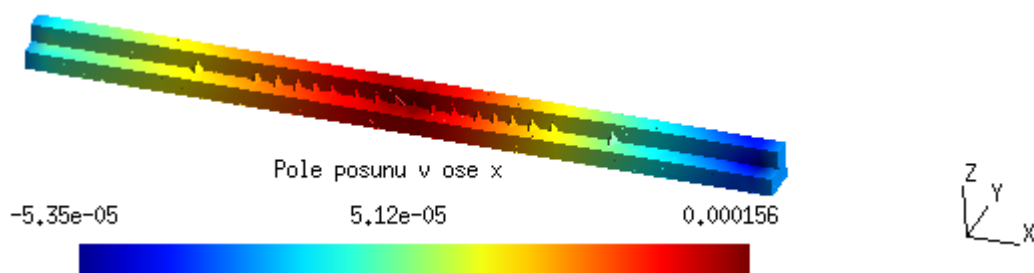


Obrázek 5.7: Ohodnocení vrcholů nosníku - úloha dvou materiálů

Uzel	Posun
u_0 [mm]	$1,53 \cdot 10^{-1}$
u_5 [mm]	$1,40 \cdot 10^{-1}$
u_6 [mm]	$1,44 \cdot 10^{-1}$
u_7 [mm]	$1,40 \cdot 10^{-1}$
u_8 [mm]	$1,36 \cdot 10^{-1}$

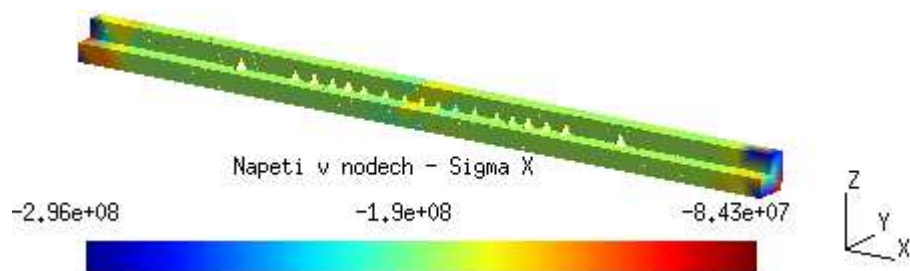
Tabulka 5.3: Kombinovaná úloha - výsledné posuny sledovaných bodů.

Výstup modelu (posuny v ose x) je zachycen na (obr. 5.8)¹¹. Jelikož celou dobu řešíme primární úlohu, vyřešením rovnice (3.8) dostáváme pouze hodnoty posunů jednotlivých bodů ve všech osách. Z těchto hodnot ale můžeme spočítat i napětí (viz. obr. 5.9) na jednotlivých elementech.



Obrázek 5.8: Řešení úlohy nosníku ze dvou materiálů - posunutí v ose x

¹¹Výstup modelu je udělán formou řezu, aby bylo vidět, zda jsou posuny konzistentní v celém průřezu nosníku, nebo zdali dochází k různým posunům v různých vzdálenostech od osy nosníku. Zobrazení řezu nosníku je použito také u vyhodnocení napětí v nosníku.



Obrázek 5.9: Řešení úlohy nosníku ze dvou materiálů - napětí v ose x; Zelená barva nosníku udává průměrnou hodnotu napětí $\bar{\sigma}_x = -1,85 \cdot 10^2 \text{ MPa}$

5.3.3 Diskuse výsledků

Pokud bychom se podívali nejprve na řešení posunu středové roviny našeho nosníku, zjistíme, že se řešení naším modelem dosti přibližuje analytickému řešení. Zejména v bodě O lze říci, že hodnoty jsou takřka totožné. U ostatních bodů již dochází k malým odchýlkám.

V případě porovnání napjatosti nosníku se dostáváme opět do stavu, kdy model na počítači velice dobře vystihuje chování nosníku vypočtené analyticky. Zde se ovšem dostáváme k problému uložení nosníku. Ten byl dokonale vetknut na obou stranách. V tu chvíli začíná na elementech bezprostředně sousedících s body vetknutí vzrůstat napětí. Tento jev je zřejmý, jelikož element nemůže sledovat tepelné namáhání změnou polohy. Roste v něm tedy napětí.

Vetknutí nosníku má jistě vliv i na drobné odchýlky v posunu středové roviny.

Závěr

Diplomová práce se zabývala vytvořením modelu elastického chování materiálu ve 3D oblasti, který by zahrnoval vliv tepelné roztažnosti. Při jeho stavbě bylo zapotřebí realizovat několik kroků. Výsledkem stavby modelu je program řešící úlohu elasticity.

V první kapitole byla vyložena základní fakta z oblasti pružnosti a pevnosti se zahrnutím vlivu tepelné roztažnosti. Tyto vztahy byly následně použity jako podklad pro vytvoření matematického modelu.

Matematická formulace, odvození slabého řešení a aplikace metody konečných prvků jsou popsány ve 2. a 3. kapitole.

Čtvrtá kapitola se zabývá implementací modelu. Zdrojové kódy jsou psány v programovacím jazyce Java a vycházejí z metodiky DF^2EM [2]. Je zde také uveden popis základních tříd (programových součástí), které jsou nezbytné k sestavení, výpočtu a následné interpretaci výsledků. V průběhu implementace modelu bylo vytvořeno i množství doplňkových tříd, které ověřovaly úspěšnost implementace a testovaly zvolené matematické rovnice na úlohách nižší dimenze. Součástí implementace je tedy např. model elastického chování materiálu ve 2D.

Poslední část této práce se zabývá testováním vytvořeného modelu. Byly zvoleny tři odlišné testovací úlohy, jejichž analytické řešení je známé. Toto řešení bylo následně porovnáno s výsledky výpočtu. Porovnání prokázalo, že implementovaný model velmi dobře odpovídá analytickým řešením, a tedy že sestavení modelu a jeho implementace byla úspěšná. Tím se podařilo splnit cíle diplomové práce na implementaci nového modelu.

Vznikl tak ucelený a dokumentovaný nástroj pro řešení úloh elasticity s vlivem tepelné roztažnosti. Protože byl při stavbě modelu použit objektový návrh a metodika DF^2EM , je možné tento model snadno a efektivně znovu využít při tvorbě složitějších modelů.

Reference

- [1] Eckel, B., *Myslíme v jazyku Java, 1. díl*, Praha, Česká republika: Grada Publishing, 2001. ISBN 80-247-9010-6.
- [2] Frydrych, D., *Metodika implementace metody konečných prvků DF^2EM* , Liberec: 2007. URL: <<http://acervus.kmo.tul.cz/DF2EM/>>
- [3] Frydrych, D. - Rálek, P., *Konzultace o matematické definici úlohy*, TU Liberec 2007.
- [4] Geuzaine, Ch. - Remacle, J. F., *Gmsh Reference Manual*, 2007. URL: <<http://www.geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf>>
- [5] Herout, P., *Učebnice jazyka Java*, České Budějovice, Česká republika: Koop, 2004. ISBN 80-7232-115-3.
- [6] Hokr, M., *Analýza MH modelu průsakového proudění - diplomová práce*, Praha, Česká republika: ČVUT, 1999.
- [7] Horský, J. - Novotný, J. - Štefaník, M., *Mechanika ve fyzice*, Praha, Česká republika: Academia, 2001. ISBN 80-200-0208-1.
- [8] Horyl, P., *Inženýrské základy MKP*, Ostrava: 2002. URL: <http://www.337.vsb.cz/FILES/texty_PDF/Inz_zakl_MKP_2002.pdf>
- [9] Kanisová, H. - Müller, M., *UML srozumitelně*, Brno, Česká republika: Computer Press, 2004. ISBN: 80-251-0231-9.
- [10] Kolář, V. - Kratochvíl, J. - Leitner, F. - Ženíšek, A., *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků: 2., přepracované vydání*, Praha, Československo: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1979.

- [11] Nečas, J. - Hlaváček, I., *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*, Praha, Československo: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [12] Petruška, J., *Počítačové metody v mechanice II*, Brno. URL: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/SKRIPTA/petruska/PocitacovaMechanikaII.pdf>
- [13] Plánička, F., *Základy matematické teorie pružnosti a moderní výpočtové metody*, Plzeň, Česká republika: VŠSE v Plzni - Ediční středisko, 1990.
- [14] Rálek, P., *Modelování piezoelektrických jevů - diplomová práce*, Praha, Česká republika: ČVUT, 2000.
- [15] Rektorys, K., *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Praha, Česká republika: Academia, 1999. ISBN 80-200-0714-8.
- [16] Rektorys, K. a kol., *Přehled užití matematiky II, 7. vydání*, Praha, Česká republika: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-181-7.
- [17] Šejnoha, J. - Bittnarová, J., *Pružnost, pevnost, plasticita I*, Praha, Česká republika: ČVUT, 1991.
- [18] Zienkiewicz, O.C. - Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Volume 1, The Basis, Fifth edition*, Oxford, United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 0-7506-5049-4.
- [19] Zienkiewicz, O.C. - Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Volume 2, Solid Mechanics, Fifth edition*, Oxford, United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 0-7506-5055-9.

Přílohy

A Přiložené CD

Na přiloženém CD je program řešící úlohu elasticity, modelové úlohy a text diplomové práce ve formátu PDF. Nachází se zde také NetBeans IDE, v němž byl model implementován. V následující tabulce jsou jména složek obsažených v kořenovém adresáři přiloženého CD-ROM. Popiska k dané složce udává její rámcový obsah.

Složka	rámcový obsah složky
/doc	Elektronická podoba diplomové práce.
/model	Archiv s implementací modelu - projekt pro NetBeans IDE.
/NetBeans	NetBeans IDE; Je k dispozici pro platformy Linux a Windows.
/task	Modelové úlohy - geometrie, síť, výsledné hodnoty. Soubory spustitelné v programu GMSH.

Prostředí NetBeans IDE potřebuje pro svou instalaci a spuštění již předem nainstalovaný Java SE Development Kit (JDK), který je možné stáhnout z <http://java.sun.com/>.